第11卷 第1期　　电子科学学刊　　Vol.11 No.1
1989年1月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　Jan. 1989

应用电磁场"互能公式"简化电磁场公式的符号表示*

赵双任
(西北电讯工程学院，西安)

摘要　本文利用内积和互能公式来简化一些重要的电磁场公式的符号表示。

关键词　电磁场;内积;互能公式

1. 引言

符号是科学技术工作者交流思想的工具。采用正确和简单的符号往往可起到事半功倍的作用。目前电磁场的一些基本公式和定理的表达式仍较繁，本文试图将这些公式化简。

2. 基本概念

空间中的电磁场状态和场源分布分别为

$$\zeta = \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}\}, \qquad \tau = \{\boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\} \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 分别为电场，磁场，电流密度和磁流密度。

共轭场、共轭源和共轭介质　设空间中某一场 ζ 和源 τ 满足 Maxwell 方程

$$\bar{L} \cdot \zeta = \tau \tag{2}$$

式中算子 $\bar{L}$ 定义为

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} -j\omega\varepsilon \bar{I}_t & \mathscr{D} \\ -\mathscr{D} & -j\omega\mu \bar{I}_t \end{bmatrix} \tag{3}$$

式中，$\mathscr{D}$ 由 $\mathscr{D} \cdot \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ 定义，此处 $\boldsymbol{A}$ 为任意矢量，ω 为简谐场的频率，ε, μ 分别为介电常数和磁导率。定义共轭场 ζ^+，共轭源 τ^+，共轭介质 ε^+, μ^+，共轭算子 $\bar{L}^+$ 为：

$$\zeta^+ = \{\boldsymbol{E}^*, \quad \boldsymbol{H}^*\}; \qquad \tau^+ = \{-\boldsymbol{J}^*, \boldsymbol{K}^*\} \tag{4}$$

$$\varepsilon^+ = \varepsilon^*; \qquad \mu^+ = \mu^* \tag{5}$$

$$\bar{L}^+ = \begin{bmatrix} -j\omega\varepsilon^+ \bar{I}_t & \mathscr{D} \\ -\mathscr{D} & -j\omega\mu^+ \bar{I}_t \end{bmatrix} \tag{6}$$

式中"$*$"为复数共轭号、"+"为场和源等的共轭号。可证明共轭场和共轭源在共轭介质中满足 Maxwell 方程，即：

$$\bar{L}^+ \cdot \zeta^+ = \tau^+ \tag{7}$$

* 1987年2月11日收到，1987年7月11日修改定稿

共轭变换　在一个电磁场公式中用共轭场 ζ^+，共轭源 π^+ 和共轭介质 ε^+, μ^+ 替换 ζ, π 和 ε, μ 称为共轭变换，经共轭变换后电磁场公式仍然成立。

曲面广义内积　在闭曲面 Γ 上可定义内积：

$$[\zeta_1, \zeta_2]_\Gamma = \oiint_\Gamma (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2^* + \boldsymbol{E}_2^* \times \boldsymbol{H}_1) \cdot \hat{n} dS \tag{8}$$

式中，$\zeta_i = \{\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{H}_i\}$，$i = 1, 2$，$\hat{n}$ 是曲面 Γ 的外法线单位矢，该内积满足内积公理[1]（正定性除外，故加广义二字）。

由点乘构成的内积　设 η_1，η_2 为两个任意的 6 维矢量（注：可以是场也可以是源），定义

$$(\eta_1, \eta_2)_V = \int_V \sum_{i=1}^{6} \eta_{1i} \eta_{2i}^* dv \tag{9}$$

3. 电磁场互能公式与 Lorentz 互易定理

(1) *电磁场互能公式*　可证明一个与矢量格林公式类似的数学公式

$$-[\zeta_1, \zeta_2]_\Gamma = (\bar{L} \cdot \zeta_1, \zeta_2)_V + (\zeta_1, \bar{L} \cdot \zeta_2)_V \tag{10}$$

式中 $\bar{L}$ 由(3)式定义，此处 $\bar{L}$ 中 ε，μ 取实数，利用 Maxwell 方程(2)式得

$$-[\zeta_1, \zeta_2]_\Gamma = (\pi_1, \zeta_2)_V + (\zeta_1, \pi_2)_V \tag{11}$$

作者称上式为电磁场互能公式，如将它写成分量形式，有

$$-\oiint_\Gamma (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2^* + \boldsymbol{E}_2^* \times \boldsymbol{H}_1) \cdot \hat{n} dS = \int_V (\boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2^* + \boldsymbol{K}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2^* + \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{J}_2^* + \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{K}_2^*) dv \tag{12}$$

(2) *互能公式与互易定理之间的关系*　对互能公式关于角标 2 的量作共轭变换，得

$$-[\zeta_1, \zeta_2^+]_\Gamma = (\pi_1, \zeta_2^+)_V + (\zeta_1, \pi_2^+)_V \tag{13}$$

改写成分量形式

$$\oiint (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1) \cdot \hat{n} dS = \int_V (\boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{K}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{J}_2 + \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{K}_2) dv \tag{14}$$

这正是 Lorentz 互易定理。反之在无耗媒质中对互易定理关于角标 2 的量作共轭变换可得互能公式。

4. 修正的互能公式

对各向异性或双各向异性的媒质，文献[2]用本构关系 $\bar{C}_{EH}$ 描述

$$\bar{C}_{EH} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} & \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} & \bar{\mu} \end{bmatrix} \tag{15}$$

式中 C_{EH} 满足 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = C_{EH} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$；$\bar{\varepsilon}$，$\bar{\mu}$ 分别为电容率张量和磁导率张量；$\bar{\alpha}$，$\bar{\beta}$ 为两个电磁转换张量；$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为电位移矢量和磁感应强度矢量。

互补媒质、共轭媒质和共轭互补媒质　由本构关系(15)式定出的媒质所对应的互补媒质、共轭媒质和共轭互补媒质分别定义为：

$$\bar{C}^c_{EH} = \begin{bmatrix}\bar{\varepsilon}^c & \bar{\alpha}^c \\ \bar{\beta}^c & \bar{\mu}^c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{\varepsilon}^t & -\bar{\beta}^t \\ -\bar{\alpha}^t & \bar{\mu}^t\end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\bar{C}^+_{EH} = \begin{bmatrix}\bar{\varepsilon}^+ & \bar{\alpha}^+ \\ \bar{\beta}^+ & \bar{\mu}^+\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{\varepsilon}^* & -\bar{\alpha}^* \\ -\bar{\beta}^* & \bar{\mu}^*\end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\bar{C}^d_{EH} = \begin{bmatrix}\bar{\varepsilon}^d & \bar{\alpha}^d \\ \bar{\beta}^d & \bar{\mu}^d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{\varepsilon}^{t*} & \bar{\beta}^{t*} \\ \bar{\alpha}^{t*} & \bar{\mu}^{t*}\end{bmatrix} \tag{18}$$

上述媒质所对应的 Maxwell 算子分别记作 $\bar{L}$, $\bar{L}^c$, $\bar{L}^+$, $\bar{L}^d$，即

$$\bar{L}^f = \begin{bmatrix}-j\omega\bar{\varepsilon}^f & \bar{\mathscr{D}} - j\omega\bar{\alpha}^f \\ -\bar{\mathscr{D}} - j\omega\bar{\beta}^f & -j\omega\bar{\mu}^f\end{bmatrix} \tag{19}$$

式中，f 取值 c，$+$，d 或干脆无上标。源 π 在各均媒质中的场分别记为 ζ, ζ^c, ζ^+ 和 ζ^d，满足 Maxwell 方程

$$\bar{L}^f \cdot \zeta^f = \pi \tag{20}$$

与(10)式类似在双各向异性媒质中下式成立

$$-[\zeta_1, \zeta_2]_\Gamma = (\bar{L} \cdot \zeta_1, \zeta_2)_V + (\zeta_1, \bar{L}^d \cdot \zeta_2)_V \tag{21}$$

以 ζ_2^d 取代上式中 ζ_2，并利用(20)式，得

$$-[\zeta_1, \zeta_2^d]_\Gamma = (\pi_1, \zeta_2^d)_V + (\zeta_1, \pi_2)_V \tag{22}$$

作者称上式为修正的互能公式，将它写成分立的形式得

$$-\oint\!\!\!\oint_\Gamma (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2^{d*} + \boldsymbol{E}_2^{d*} \times \boldsymbol{H}_1) \cdot \hat{n}\, dS$$
$$= \int_V (\boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2^{d*} + \boldsymbol{K}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2^{d*} + \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{J}_2^* + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{K}_2^*)\, dv \tag{23}$$

对上式含角标 2 的量作共轭变换，并注意到 $(\bar{C}^d_{EH})^+ = \bar{C}^c_{EH}$，即共轭互补媒质经共轭变换后为互补媒质，得

$$\oint\!\!\!\oint (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2^c - \boldsymbol{E}_2^c \times \boldsymbol{H}_1) \cdot \hat{n}\, dv = \int_V (\boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2^c - \boldsymbol{K}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{J}_2 + \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{K}_2)\, dv \tag{24}$$

这正是修正的互易定理[4]。

对称媒质和无耗媒质　若一媒质 C_{EH} 与它的互补媒质相同，即 $\bar{C}_{EH} = \bar{C}^c_{EH}$，该媒质称作对称媒质；若某一媒质 $\bar{C}_{EH}$ 与它的共轭互补媒质相同，即 $\bar{C}_{EH} = \bar{C}^d_{EH}$，该媒质称作无耗媒质。在对称媒质中互易定理(14)式成立；在无耗媒质中互能公式（12）式成立。

综上所述，在双各向异性媒质中，修正的互易定理与修正的互能公式等价，但有不同的形式；而互易定理与互能公式不等价，一个仅在互补媒质中成立，一个仅在无耗媒质中成立。

5. 互能公式的应用

（1）*惠更斯原理*　若区域 V 的边界为 Γ，$\hat{n}^{(-)}$ 为曲面 Γ 的内单位法矢，并设惠更斯源定义为

$$\pi_{S1} = \{\hat{n}^{(-)} \times \boldsymbol{H}_1, -\hat{n}^{(-)} \times \boldsymbol{E}_1\} \tag{25}$$

互能公式(11)可化为

$$-(\tau_{S1},\zeta_2)_\Gamma=(\tau_1,\zeta_2)_V+(\zeta_1,\tau_2)_V \tag{26}$$

此处，设源 $\tau_1=\{J_1, K_1\}$，$\tau_2=\{\hat{q}\delta(x-x_p), 0\}$，及其产生的场 $\zeta_1=\{E_1, H_1\}$，$\zeta_2=\{E_2, H_2\}$，见图1。

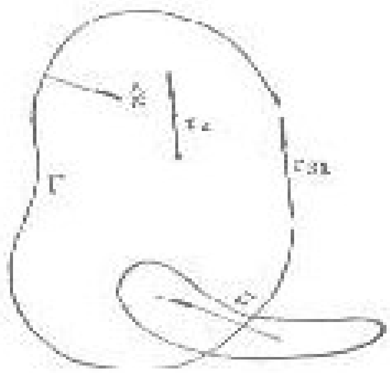

图1　曲面、场和源

由于 $\tau_2=\{\hat{q}\delta(x-x_p), 0\}$，$x_p$ 在 V 内，$\hat{q}$ 为任意单位矢量，δ 为 Dirac δ 函数，将 τ_2 代入(26)式可得：

$$\hat{q}\cdot E_1=-(\tau_{S1},\zeta_2)_\Gamma-(\tau_1,\zeta_2)_V \tag{27}$$

这便是惠更斯原理，写成分量形式有

$$\hat{q}\cdot E_1(x_p)=-\oint\!\!\oint_\Gamma(\hat{n}^{(-)}\times H_1\cdot E_2^*-\hat{n}^{(-)}\times E_1\cdot H_2^*)dS-\int_V(J_1\cdot E_2^*+K_1\cdot H_2^*)dv \tag{28}$$

(2) 并矢格林定理　设 g 为一 6×6 的二阶张量，并满足

$$L\cdot g=I_6\delta(x-x_p) \tag{29}$$

式中 L 由(5)式定义，称 g 为6维并矢格林函数，记 $\bar{\tau}=I_6\delta(x-x_p)$，与前面类似有

$$-[\zeta_1, g]=(\tau_1, g)_V+(\zeta_1,\bar{\tau})_V \tag{30}$$

式中 $\hat{n}$ 指向区域 V 外，而

$$[\zeta_1, g]_\Gamma=\oint\!\!\oint_\Gamma\hat{n}\cdot(E_1\times\bar{H}^*-H_1\times\bar{E}^*)dS \tag{31}$$

式中 $\bar{E}$, $\bar{H}$ 为 g 的分块矩阵，定义为 $g=\begin{bmatrix}\bar{E}\\ \bar{H}\end{bmatrix}$，而

$$(\tau_1, g)_V=\int_V(J_1\cdot\bar{E}+K_1\cdot\bar{H})dv \tag{32}$$

$(\zeta_1,\bar{\tau})_V$ 也有类似的定义，利用 $\bar{\tau}$ 的定义，(30)式可写为

$$\zeta_1(x_p)=-[\zeta_1, g]_\Gamma-(\tau_1, g)_V \tag{33}$$

对上式作共轭变换得：

$$\bar{\zeta}_1(x_p)=-[\zeta_1, g^+]_\Gamma-(\tau_1, g^+)_V \tag{34}$$

式中 $g^+=\begin{bmatrix}\bar{E}^*\\ \bar{H}^*\end{bmatrix}$。上式称为6维并矢格林定理。(33)式同样可用来求 Γ 内的场。若 ζ_1 的源和 g 的源都在 V 内，由辐射条件可证明，上式右边第一项消失，即 $[\zeta_1, g^+]_\Gamma=0$。故有

$$\zeta_1(x_p)=-(\tau_1, g^+)_V \tag{35}$$

自由空间中的6维并矢格林函数为：

$$g=\begin{bmatrix}-j\omega\mu\bar{G} & -\nabla\times\bar{G}\\ \nabla\times\bar{G} & -j\omega\varepsilon\bar{G}\end{bmatrix} \tag{36}$$

式中 $\bar{G}=\left(\bar{I}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G_0$，$G_0=e^{-jkr}/(4\pi r)$，$k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$，$r=\|x-x_p\|$。

6. 结论

利用内积和互能公式，一些重要的电磁场公式都可以用十分紧凑的形式表达出来，这

样的表达式对于理解，记忆和计算机编程序都有很大帮助。

参 考 文 献

[1] 郑维行，实变函数与泛函分析概要，人民教育出版社，1963 年，第 159～161 页。

[2] J. A. 孔，电磁场理论，人民教育出版社，1980 年，第 6 页。

[3] J. A. 孔，电磁场理论，人民教育出版社，1980 年，第 170 页。

THE SIMPLIFICATION OF FORMULAS OF ELECTROMAGNETIC FIELDS BY USING "MUTUAL ENERGY FORMULA"

Zhao Shuangren

(Northwest Telecommunication Engineering Institute, Xi'an)

Abstract The expression of a few important formulas of electromagnetic fields are simplified by using the inner product and mutual energy formula.

Key words Electromagnetic fields; Inner product; Mutual energy formula